



Metode Numerice

Curs 03

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Gigel Măceşanu



Cuprins

- **Introducere**
- **Metode directe - Sisteme inferior triunghiulare**
- **Metode directe - Metoda lui Gauss**
- **Metode directe - Metode Iterative**
- **Metode Indirecte - Metoda Jacobi**
- **Metode Indirecte - Metoda Gauss-Seidel**
- **Metode Indirecte - Metoda Southwell**



Introducere

- Fie funcția $f: X \rightarrow Y, X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^n, f(x) = 0$ un sistem de ecuații
- După gradul necunoscutelor care intră în aceste ecuații, sistemele pot fi astfel:
 - **sisteme liniare: dacă termenii ecuațiilor sunt de gradul întâi**
 - **sisteme neliniare dacă există ecuații ce conțin termeni de grad mai mare ca unu**
- Un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute se definește astfel:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
- Sub formă matriceală se poate scrie: $[A] \cdot \{X\} = \{B\}$



Introducere

- Sub formă matriceală se poate scrie: $[A] \cdot \{X\} = \{B\}$, unde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Metodele de rezolvare a sistemelor liniare le putem împărți în două categorii:
 - **Metode directe (MD), care presupun un număr finit de operații, prin transformarea matricii de coeficienți a sistemului la o formă particulară (triunghiulară sau matrice unitate).**
 - metoda pentru sisteme triunghiulare, metoda eliminării a lui Gauss
 - **Metode indirecte, care presupun un număr infinit de operații (depinde de precizia cu care se dorește să se facă calculul)**
 - Metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel, metoda Southwell



MD - Sisteme inferior triunghiulare

- Aceste sisteme sunt de forma următoare:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

- Se aplică metoda substituției, obținându-se soluțiile finale:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \text{ și } x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \text{ cu } i = \overline{1, n}$$

- Același principiu se aplică și la sistemele superior triunghiulare

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$



MD – Metoda lui Gauss

- Pentru realizarea transformării sistemului, se fac următorii pași:
 - Se analizează toți termenii a_{k1} , cu $k = \overline{1, n}$
 - Ecuația care are valoarea max a coeficientului e adusă pe primul loc
 - Prima ecuație a sistemului după reordonare se înmulțește pe rând cu factorul: $m_{k1} = a_{k1}/a_{11}$, cu $k = \overline{2, n}$ și se scade din ecuația de pe poziția k , obținându-se:

$$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}$$

$$a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)}$$

$$a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)}$$

.....

$$a_{n2}^{(2)} x_2 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_3^{(2)}$$



MD – Metoda lui Gauss

- Pentru realizarea transformării sistemului, se fac următorii pași:
 - Se aduce pe locul lui a_{22} cel mai mare termen din coloana 2 și se înmulțește linia a doua cu $m_{k2} = a_{k2}/a_{22}$, cu $k = \overline{3, n}$ și se scade din ecuația de pe poziția k

- Prin repetarea algoritmului se obține sistemul:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

- Soluțiile se obțin pornind de la ultima ecuație:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \text{ și } x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \cdot (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)$$



MD – Metoda lui Gauss

▪ Exemplu:

➤ Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 = 7 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases} \text{ echivalent cu } \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

➤ Se calculează factorul $m_{21} = \frac{5}{10} = 0,5$ și $m_{31} = \frac{-3}{10} = -0,3$ se scade din ecuația de pe poziția 2 respectiv 3:

$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & -0,1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,1 \end{pmatrix}$$

➤ Se repetă pentru ecuația a doua $m_{32} = \frac{-0,1}{2,5} = -0,04$ și se scade din

ecuația de pe poziția 3:
$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2,5 & 5 \\ 0 & 0 & 6,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2,5 \\ 6,2 \end{pmatrix}$$



Metode Iterative

- Aceste metode sunt *convergente* numai pentru sistemele de ecuații a căror matrice de coeficienți este *diagonal dominantă*
- Prin matrice *diagonal dominantă* se înțelege matricea la care termenii de pe diagonală au valorile absolute mai mari sau cel mult egale cu suma valorilor absolute a termenilor aflați pe aceeași linie cu ei. Adică este îndeplinită condiția:

$$\left| a_{i,i} \right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} \left| a_{i,j} \right| \quad , \quad i = \overline{1, n}$$

- În cazul tuturor metodelor iterative algoritmul pornește de la o soluție a sistemului aleasă în mod arbitrar, de obicei soluția nulă:

$$x_i^{(0)} = 0 \quad , \quad i = \overline{1, n}$$

- Scopul metodelor este acela de a *corecta succesiv soluția inițială* până la *obținerea soluției reale* a sistemului.



MI - Metoda Jacobi

- Metoda presupune transformarea sistemului (scris matriceal $[A]\{X\} = \{B\}$) sub o formă în care fiecare necunoscută este exprimată în funcție de celelalte necunoscute, parcurgându-se următoarele etape:
 - **Se transformă matricea sistemului $[A]$, astfel încât pe diagonala principală să se găsească elementele având cele mai mari valori absolute**
 - **Se verifică dominața pe linie sau pe coloane:**
 - **Dominața pe linii: raportul dintre valoarea absolută a elementului aflat pe diagonala principală și suma valorilor absolute ale celorlalte elemente de pe aceeași linie**
 - **Dominața pe coloane: raportul dintre valoarea absolută a elementului aflat pe diagonala principală și suma valorilor absolute ale celorlalte elemente de pe aceeași coloană**



MI - Metoda Jacobi

- Se exprimă necunoscutele x_i în funcție de necunoscutele x_j folosind ecuația i a sistemului:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$ rezultând:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right), \text{ unde } a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, n}$$

- Valorile inițiale ale necunoscutelor, notate cu $x_j^{(0)}$ ($j = \overline{1, n}, j \neq i$) se aleg arbitrar
- O iterație $k=1,2,3\dots$ se calculează utilizându-se relația:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)} \right), \quad i = \overline{1, n}$$

- Algoritmul se încheie atunci când diferența dintre două soluții determinate succesiv este mai mică decât o valoare impusă inițial:

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}$$



MI - Metoda Jacobi

- Exemplu:

➤ Să se rezolve cu o precizie de 10^{-3} sistemul următor:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ 16x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

- Se inversează prima cu a doua ecuație:

$$\begin{cases} 16x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

- Sistemul are o matrice dominantă pe linii, astfel:

$$d_1 = \frac{16}{5} = 3.2; d_2 = \frac{8}{4} = 2; d_3 = \frac{5}{2} = 2.5$$

- Relațiile de recurență în acest caz sunt:



MI - Metoda Jacobi

▪ Exemplu:

$$\bullet \begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{16} (24 + 2x_2^{(k-1)} - 3x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{8} (-3 - 3x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{5} (12 - x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)}) \end{cases} \text{ cu } k = 1, 2, 3, \dots$$

- Se consideră valorile inițiale: $\{X\}^{(0)} = \{0 \ 0 \ 0\}^T$
- Înlocuind valorile inițiale în relațiile de recurență, și apoi cele obținute din iterațiile următoare, se obține tabelul:

Iterația	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	1,5	-0,375	2,4
2	1,003125	-1,2375	2,025
3	0,965625	-1,0043	1,951875
4	1,008486	-0,98109	2,006016
5	1,001235	-1,00393	2,002084
Soluția exactă	1	-1	2



MI - Metoda Gauss-Seidel

- Metoda reprezintă o îmbunătățire a metodei Jacobi în sensul că la iterația k , valorile necunoscute sunt calculate nu numai funcție de valorile determinate la iterația precedentă dar și de cele calculate la iterația în curs.
- Relațiile de calcul ale metodei *Gauss-Seidel* pentru iterația k sunt:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{i,i}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)} \right), \quad i = \overline{1, n}$$

- Calculul iterativ va începe cu ecuația având dominanța cea mai mare
- Algoritmul se încheie atunci când diferența dintre două soluții determinate succesiv este mai mică decât o valoare impusă inițial, la fel ca la metoda Jacobi



MI - Metoda Southwell

- Metoda presupune scrierea sistemului de ecuații $[A]\{X\} = \{B\}$ sub o formă în care din fiecare ecuație a fost separată o necunoscută.
- Ca urmare forma inițială a sistemului folosind ecuația i scrisă astfel:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n}$$

- suferă următoarele transformări:

- se împarte fiecare ecuație la coeficientul de pe diagonala principală:

$$x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j - \frac{b_i}{a_{i,i}} = 0$$

- Sistemul se scrie sub următoarea formă:

$$-x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{i,j} \cdot x_j + c_i = 0$$

Unde $b_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}}$ și $c_i = \frac{b_i}{a_{i,i}}$



MI - Metoda Southwell

- Algoritmul constă în parcurgerea mai multor etape plecând de la o soluție inițială aleasă în mod arbitrar. De regulă se aleg ca valori inițiale valorile

nule: $x_i^{(0)} = 0$, $i = \overline{1, n}$

- **Etapa 1: Se înlocuiesc valorile inițiale în sistem, ca urmare din fiecare ecuație va rezulta o valoare numită rest. Valorile acestora se vor obține cu relațiile:**

$$r_i^{(1)} = -x_i^{(0)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{i,j} \cdot x_j^{(0)} + c_i$$

- **Se determină valoarea absolută maximă dintre resturile calculate anterior:**

$$\left| r_m^{(1)} \right| = \max_i \left| r_i^{(1)} \right| , \quad i = \overline{1, n}$$

- **valoarea astfel determinată va corecta valoarea necunoscutei având indicele respectiv**

$$x_m^{(1)} = x_m^{(0)} + r_m^{(1)}$$

- **După ce a fost obținută valoarea $x_m^{(1)}$ se recalculează resturile utilizând această valoare a necunoscutei, se obțin astfel valori noi pentru celelalte $n-1$ resturi.**

- **Se alege valoarea maximă dintre cele $n-1$ resturi corectându-se necunoscuta corespunzătoare. Procedeu se repetă, în același mod, până la corectarea tuturor necunoscutelor, după care se trece la etapa următoare.**



MI - Metoda Southwell

- **Etapa k: Se înlocuiesc valorile necunoscutele obținute la etapa precedentă în sistem, se obțin resturile:**

$$r_i^{(k)} = -x_i^{(k-1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{i,j} \cdot x_j^{(k-1)} + c_i$$

- **Se determină restul cu valoarea absolută cea mai mare:**

$$\left| r_m^{(k)} \right| = \max_i \left| r_i^{(k)} \right|, \quad i = \overline{1, n}$$

- **valoarea astfel determinată va corecta valoarea necunoscutei având indicele corespunzător**

$$x_m^{(k)} = x_m^{(0)} + r_m^{(1)} + r_m^{(2)} + \dots + r_m^{(k)}$$

- **După ce a fost obținută valoarea $x_m^{(k)}$ se recalculează resturile utilizând această valoare a necunoscutei, se obțin astfel valori noi pentru celelalte $n-1$ resturi și se alege valoarea maximă corectându-se necunoscuta corespunzătoare. Procedul se repetă, în același mod, până la corectarea tuturor necunoscutelor. Algoritmul se încheie atunci când diferența dintre două soluții determinate succesiv este mai mică decât o valoare impusă inițial, adică este îndeplinită condiția:**

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}$$



MI - Metoda Southwell

▪ Exemplu

➤ Se consideră sistemul:
$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = 8 \\ -x_1 + 10x_2 = 9 \end{cases}$$

➤ Etapele implicate în rezolvarea sistemului sunt următoarele:

- Se rescrie sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - 0,2x_2 = 0,8 \\ -0,1x_1 + x_2 = 0,9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + 0,2x_2 + 0,8 = 0 \\ -x_2 + 0,1x_1 + 0,9 = 0 \end{cases}$$

- Se aleg valorile inițiale: $x_1 = 0, x_2 = 0$
- Se înlocuiesc valorile inițiale în sistem și se obțin resturile:

$$r_1^{(1)} = 0,8 \text{ și } r_2^{(1)} = 0,9$$

- Se determină valoarea absolută maximă dintre resturile calculate anterior, care va fi: $r_2^{(1)} = 0,9$



MI - Metoda Southwell

▪ Exemplu

- Se corectează valoarea necunoscutei cu indicele corespunzător:

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + r_2^{(1)} = 0 + 0,9 = 0,9$$

- Se recalculează restul $r_1^{(1)}$ utilizând această valoare a necunoscutei x_2 , și se obține

$$r_1^{(1)} = 0 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,8 = 0,98$$

- Deoarece este singurul rest rămas, nu mai este necesară determinarea unei *valori maxime*. Ca urmare, va fi corectată valoarea necunoscutei corespunzătoare, adică x_1 , și se obține: $x_1^{(1)} = 0 + 0,98$
- La sfârșitul etapei 1 se obțin următoarele valori: $x_1^{(1)} = 0,98$ și $x_2^{(1)} = 0,9$
- Se constată că valorile obținute s-au apropiat semnificativ de soluțiile sistemului. Se pot parcurge etape suplimentare până la obținerea soluțiilor cu precizia dorită.



Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro