Universitatea Transilvania din Braşov
Laboratorul de Vedere Artificială Robustă şi Control

Metode Numerice

Curs 02

Calcul matricial și erori de calcul numeric

Gigel Măceșanu

Cuprins

- Calcul matriceal
- Surse de erori
- Eroarea absolută și eroarea relativă
- Propagarea erorilor

Calcul matricial

- Prin *matrice* se înțelege un tablou cu *n* linii și *m* coloane
- Elementele unei matrici $a_{i,j}$ pot fi numere reale sau complexe.
- Notație matrice: $A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$
- Cazuri particulare:
  - $n = m \rightarrow$ matrice pătrată
  - $n = 1 \rightarrow$ matrice linie (vector linie)
  - $m = 1 \rightarrow$ matrice coloană (vector coloană)
  - $a_{i,j} = 0, i > j \rightarrow$ matrice triunghiulară inferior
  - $a_{i,j} = 0, i < j \rightarrow$ matrice triunghiulară superior
  - $a_{i,j} = 0, i \neq j$ și $a_{i,j} \neq 0, i = j \rightarrow$ matrice diagonală
  - $a_{i,j} = 0, i \neq j$ și $a_{i,j} \neq 1, i = j \rightarrow$ matrice unitate
  - $a_{i,j} = a_{j,i} \rightarrow$ matrice simetrică

Calcul matricial

- **Operații elementare cu matrici**
  - ***Transpunerea*: Constă în schimbarea liniilor în coloane**
    - $A^t \rightarrow$ **transpusa matricei A**
  - ***Adunarea*: Se pot aduna numai matrici având aceleaşi dimensiuni**
    - $A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m}$; $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ **unde** $i = \overline{1,n}$ **și** $j = \overline{1,m}$
    - **Proprietăți: comutativă, asociativă, distributivă**
  - ***Scăderea*: Se pot scădea numai matrici având aceleași dimensiuni**
    - $A_{n\times m} - B_{n\times m} = C_{n\times m}$; $c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$ **unde** $i = \overline{1,n}$ **și** $j = \overline{1,m}$
    - **Proprietăți: asociativă, distributivă**

Calcul matricial

- **Operații elementare cu matrici**
  - ***Înmulțirea*: Se pot înmulți numai matrici care îndeplinesc următoarea condiție:**
    - **numărul de coloane a matricii de înmulțit este egal cu numărul de linii a matricii înmulțitor:**

      $A_{n\times l} \times B_{l\times m} = C_{n\times m}$; $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$; **unde** $i = \overline{1,n}$ **și** $j = \overline{1,m}$
    - **Proprietăți: asociativă, distributivă**
  - ***Ridicarea la putere*: Se pot ridica la o putere întreagă *numai matrici pătrate*. Operaţia reprezintă o înmulţire repetată.**
    - $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$, **de *n* ori**
    - **Proprietăți: asociativă, distributivă**

Determinantul unei matrici

- Fiecărei matrici pătrate *A* i se poate asocia o cantitate scalară (un număr real), notat:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{vmatrix}$$

numit *determinat.*

- Pentru definirea determinatului se utilizează noțiunile de:
  - *Minor:* Un *minor* de ordin *n*-1 este un determinant obținut prin eliminarea unei linii și a unei coloane din determinantul dat. Minorul corespunzător termenului $a_{i,j}$ se obține eliminând linia *i* și coloana *j*.
  - *Cofator*: Fiecărui element $a_{i,j}$ i se asociază un *cofactor*, $|A_{i,j}|$, egal cu produsul dintre $(-1)^{i+j}$ și *determinantul minorului* corespunzător elementului $a_{i,j}$.
- Valoarea determinatului unei matrici pătrate este egală cu:
  - $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}|$, *cu* $i = \overline{1,n}$
  - $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}|$, *cu* $j = \overline{1,n}$

Determinantul unei matrici

- **Calculul determinanților de ordinul 2:**

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Calculul determinanților de ordinul 3 (Regula lui Sarrus):**

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} +$$

$$+a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Calculul det. de ordinul ≥4:**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ |A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 0 - 1 + 2 = 1$$

Inversa unei matrici

- Pentru fiecare matrice ***pătrată*** nesingulară (având determinantul nenul) există o matrice inversă, notată A^{-1} care satisface relația:

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = U}$$

unde *U* este matricea unitate

- Matricea inversă se determină cu următoarea relație:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)}$$

unde, $\boldsymbol{\mathrm{Adj}(A)}$ este matricea ***adjunctă*** a matricii ***A***

- Matricea adjunctă a unei matrici se definește ca fiind ***transpusa matricii cofactorilor*** matricii date, adică:

$\boldsymbol{\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{1n} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}}$, unde $\boldsymbol{d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}}$, $\boldsymbol{i, j = \overline{1, n}}$, $\boldsymbol{A_{ij}}$ este minorul elementului $\boldsymbol{a_{ij}}$ din matricea transpusă

Calculul matricei inverse

- **Metoda Gauss - Jordan**

1. ***Se construiește un tabel care conține matricea ce trebuie rezolvată (A) și matricea unitate (I)***
2. ***Alegerea unui element nenul (a_{ij}), numit pivot;***
3. ***Se modifică elementele din tabel astfel:***
   - **Elementele de pe linia pivotului se împart la pivot, iar pivotul devine 1;**
   - **Coloana pivotului se completează cu zero**
   - **Restul elementelor se determină după regula dreptunghiului:**

$$\begin{array}{ccc} a & \ldots\ldots\ldots\ldots.. & x \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{b} & \ldots\ldots\ldots\ldots.. & c \end{array} \qquad x' = \frac{bx-ac}{b}$$

unde, b este pivotul, x este elementul ce trebuie înlocuit, x' *este noua valoare a elementului* x

   - ***Dacă pe linia pivotului există un element egal cu zero, atunci coloana acestui element se copiază. Analog și pentru coloană.***
   - ***Se reiau pașii 2 și 3 până când pe fiecare linie s-a ales câte un pivot***

➢ ***După efectuarea tuturor pașilor, matricea A devine I, iar I devine A^{-1}***

Calculul matricei inverse

- **Metoda Gauss – Jordan exemplu**

  - **Se consideră matricea *A* și se dorește obținerea matricei inverse A^{-1}**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

	A			I_3		
	1	1	1	1	0	0
	1	2	3	0	1	0
	1	4	9	0	0	1
	1	1	1	1	0	0
I	0	**1**	2	-1	1	0
	0	3	8	-1	0	1
	1	0	1	-2	1	0
II	0	1	2	-1	1	0
	0	0	**2**	2	-3	1
	1	0	0	3	$-5/2$	$1/2$
III	0	1	0	-3	4	-1
	0	0	1	1	$-3/2$	$1/2$
	I_3			A^{-1}		

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

  - **Se poate verifica faptul că $A \cdot A^{-1} = I_3$ adică, avem un calcul corect**

Calculul matricei inverse

- **Algoritmul lui *Hotteling* pentru calcularea inversei unei matrici**
- **Algoritmul este exemplificat considerându-se mai întâi cazul unui număr real, apoi se aplica pe matrici**

  - **Presupunem că se cunoaşte o primă aproximare (1/*a*) a inversului numărului real *a* pe care o notăm d_1. Condiţia de convergenţa a algoritmului este ca:**

$$e_1 = |1 - a \cdot d_1| < 1$$

  - **Algoritmul constă în determinarea unui șir de aproximări $d_2, d_3, d_4, \ldots$ a inversului numărului a astfel încât erorile să tindă spre zero**

  - **Pentru a realiza condiția cerută este necesar să se determine o relație de recurență astfel încât eroarea la un moment dat să poată fi exprimată sub forma unei puteri a lui e_1. Aceasta deoarece:**

$$\lim_{k \to \infty} e_1^k = 0$$

Calculul matricei inverse

- **Se pune condiția:** $e_2 = 1 - a \cdot d_2 = e_1^2$
- **Și o sa rezulte succesiv:**

$$e_1^2 = e_1 \cdot e_1 = (1 - a \cdot d_1) \cdot (1 - a \cdot d_1) = 1 - 2 \cdot a \cdot d_1 + a^2 \cdot d_1^2$$

- **După ordonarea termenilor avem:**

$$e_1^2 = 1 - a \cdot d_1 \cdot [1 + (1 - a \cdot d_1)] = 1 - a \cdot d_1 \cdot (1 + e_1) \quad \textbf{și} \quad d_2 = d_1 \cdot (1 + e_1)$$

- **Etapele necesare obținerii inversului numărului sunt următoarele:**

$$d_2 = d_1 \cdot (1 + e_1) \Rightarrow e_2 = 1 - a \cdot d_2$$

$$d_3 = d_2 \cdot (1 + e_2) \Rightarrow e_3 = 1 - a \cdot d_3$$

$$d_k = d_{k-1} \cdot (1 + e_{k-1}) \Rightarrow e_k = 1 - a \cdot d_k$$

- **Algoritmul continuă până când e_k devine mai mic decât o valoare impusă**

Calculul matricei inverse

- **Algoritmul lui *Hotteling* pentru calcularea inversei unei matrici**

  - **Se introduce noțiunea de *normă* definită astfel:**

$$N[A] = \underbrace{\max}_{i}\left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right|\right) \quad \textbf{\textit{dacă}} \quad N[A] < 1 \quad \textbf{\textit{atunci}} \quad \lim_{n\to\infty} N[A]^n = 0$$

  - **Se definește:**
    - A **matricea pentru care dorim să calculăm inversa**
    - D_1 **prima aproximare a inversei matricii (calculată cu algoritmul anterior)**

  - **Eroarea se determină astfel:**

$$E_1 = U - A \cdot D_1$$

unde, *U* este matricea unitate

Calculul matricei inverse

- **Algoritmul lui *Hotteling* pentru calcularea inversei unei matrici**
  - **Aproximările matricei inverse sunt obținute după cum urmează:**

$$D_2 = D_1 \cdot (U + E_1) \;\Rightarrow\; E_2 = U - A \cdot D_2$$

$$D_3 = D_2 \cdot (U + E_2) \;\Rightarrow\; E_3 = U - A \cdot D_3$$

$$D_k = D_{k-1} \cdot (U + E_{k-1}) \;\Rightarrow\; E_k = U - A \cdot D_k$$

  - **Când este îndeplinită condiția $N[E_k] < \varepsilon$ procesul se oprește**
    - **ε este valoarea inițială impusă**

- **Determinarea inversei unei matrice se face în două etape:**
  - **determinarea unei prime aproximări a inversei prin algoritmul de inversare prezentat inițial (Gauss–Jordan);**
  - **corectarea valorii inversei prin parcurgerea algoritmului lui Hotteling.**

Surse de erori

- **Sunt definite 3 tipuri de erori:**
  - **Erori inerente:**
    - **Erori de măsurători inițiale, erori din calcule anterioare, erori de cunoaștere aproximativă: algebrice sau transcendente (π, *e*, $\sqrt{3}$), erori de conversie (ex: trecerea numărului zecimal 0,1 în baza 2 - $0,1_{10} = 0,0(0011)_2$)**
  - **Erori de metodă sau de trunchiere**
    - **Sunt erorile provenite din aproximațiile făcute la deducerea formulelor de calcul (de ex. aproximarea sumei unei serii printr-o suma parțială)**
  - **Erori de rotunjire**
    - **datorate reprezentării datelor și efectuării calculelor într-o aritmetică cu precizie limitată (de exemplu aritmetica virgulei mobile).**

Eroarea absolută și eroarea relativă

- Eroarea absolută e_x se definește ca diferența dintre valoarea exactă și cea aproximativă:

$$e_x = x - \overline{x},$$

unde x este valoarea exactă a numărului iar $\overline{x}$ este valoarea aproximativă (calculată)

- Eroarea relativă ε_x este definită ca raportul dintre eroarea absolută și valoarea aproximativă

$$\varepsilon_x = {}^{e_x}\!/_{\overline{x}}$$

- Eroarea relativă se exprimă adesea în procente:

$$\varepsilon_x = \frac{e_x}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

Propagarea erorilor

- **Se consideră două numere x și y, introduse cu erorile e_x și e_y**

$$x = \bar{x} + e_x, \;\; y = \bar{y} + e_y$$

- **Propagarea erorilor la adunare:**

$$x + y = \bar{x} + \bar{y} + e_x + e_y, \, e_{x+y} = e_x + e_y$$

- **Propagarea erorilor la scădere:**

$$x - y = \bar{x} - \bar{y} + e_x - e_y, \, e_{x-y} = e_x - e_y$$

- **Propagarea erorilor la înmulțire:**

$$x \cdot y = \overline{(x} + e_x) \cdot (\bar{y} + e_y) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot e_y + \bar{y} \cdot e_x + e_x \cdot e_y$$

  - **Se neglijează termenul $e_x \cdot e_y$ și se obține:**

$$e_{x \cdot y} = \bar{x} \cdot e_y + \bar{y} \cdot e_x$$

Propagarea erorilor

- **Propagarea erorilor la împărțire:**

$$\frac{x}{y}=\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}+e_y}=\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}\cdot\left(1+\frac{e_y}{\bar{y}}\right)}=\frac{1}{1+\frac{e_y}{\bar{y}}}\cdot\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}}=\frac{1-\frac{e_y}{\bar{y}}}{1-\left(\frac{e_y}{\bar{y}}\right)^2}\cdot\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}}\cong\frac{\bar{x}+e_x}{\bar{y}}\cdot\left(1-\frac{e_y}{\bar{y}}\right)$$

➢ **Neglijând termenul $\left(\frac{e_y}{\bar{y}}\right)^2 \approx 0$ din expresia anterioară rezultă**

$$\frac{x}{y}=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}+\frac{e_x}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}\cdot e_y-\frac{e_x\cdot e_y}{\bar{y}^2}$$

➢ **Neglijând termenul** $\frac{e_x\cdot e_y}{\bar{y}^2}$ **se obține expresia erori de împărțire:**

$$e_{\frac{x}{y}}=\frac{e_x}{\bar{y}}-\frac{\bar{x}}{\bar{y}^2}\cdot e_y$$

Contact:
Email: gigel.macesanu@unitbv.ro
Web: rovis.unitbv.ro